

Эта статья не была отправлена ни в один журнал в связи с **негласным запретом для сторожей публиковаться в журналах ВАК России**. Подробнее – в конце статьи.

УДК 517.923, 517.926.4

Структура общего решения уравнения Эрмита и решение при отрицательных целых n

Зайков С.Ю.

МАУ ДО «Спортивная школа зимних видов спорта Города Томска»

zaykov_tomsk@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами, частными решениями которых являются классические ортогональные многочлены. Введено понятие структуры решения для уравнений классических ортогональных многочленов, где решение выражается через дробные производные. Сформулированы и доказаны теоремы о новых свойствах этих дифференциальных уравнений. В том числе, теорема о решении этих уравнений при отрицательных целых n , что эти решения выражаются через формулы Родрига, и связаны с многочленами. Также доказана теорема о рекуррентных соотношениях для новых многочленов. В качестве примера применения этих теорем было использовано уравнение Эрмита. Для уравнения Эрмита найдены решения для отрицательных целых n , выражающиеся через многочлены, и найдены рекуррентные соотношения для них. На примере уравнения Эрмита для положительных целых n показано дублирование информации в справочниках. С целью заполнения пробелов в справочниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям предложена формулировка решения приведенного уравнения Эрмита для целых n , в том числе отрицательных, исключающие дублирование информации.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, многочлены Эрмита, формула Родрига, пробелы в справочниках, рекуррентные соотношения, дробные производные.

1 Введение

С момента появления в начале XIX века классических ортогональных многочленов, они привлекли огромное внимание, и начали использоваться в многих областях, от математической физики и математики, до компьютерной графики и вычислений трендов в экономике.

Одним из свойств их дифференциальных уравнений был тот факт, что они содержали параметр n , и при неотрицательных целых n имели частным решением многочлен степени n . Эти многочлены выражались через формулу Родрига, см. [1, с. 54], которая содержала в себе дробную производную, см. [2], порядка n .

Очевидным путем решения этих уравнений при отрицательных целых n было многократное интегрирование функции, от которой бралась дробная производная, и представление результатов этого интегрирования некой общей формулой, например, рекуррентным соотношением. Но интегрировать сложнее, чем дифференцировать, и на любом очередном интегрировании интеграл может оказаться неберущимся. Кроме того, n – кратное интегрирование имеет точность до произвольного многочлена $n - 1$ степени. Т.е. надо было избежать многозначности при

интегрировании так, чтобы результат был частным решением уравнения. После таких трудностей представление результатов общей формулой выглядело крайне сложным.

Но был возможен и другой способ решения, который не был столь очевиден. Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка является линейной комбинацией двух линейно независимых решений.

Если взглянуть на уравнение Лежандра, то многочлены Лежандра выражаются через формулу Родрига, при этом при подстановке $-v - 1$ вместо v уравнение остается неизменным. Следовательно, второе, неисследованное решение, также выражается через формулу Родрига и включает в себя дробную производную, которая при положительном n уходит в интегрирование. При отрицательном n дробные производные меняются местами, первая – интегрируется, вторая – дифференцируется.

Поэтому в данной работе использован другой подход. Вместо того, чтобы искать, какой вид примет при отрицательных целых n то первое решение, которое является многочленом при положительных целых n , искали второе решение. Полагая, что оно включает в себя дробную производную, которая интегрируется при положительных целых n , но дифференцируется при отрицательных целых n .

Второе решение было найдено. Оно дало решения уравнений классических ортогональных многочленов для отрицательных целых n .

Линейная комбинация этих решений рассматривается в работе как структура решения.

Определение 1. Назовем структурой общего решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения линейную комбинацию таких частных решений, что они содержат в качестве сомножителей дробные производные.

Очевидно, что формулы Родрига содержат дробные производные.

Важным моментом для понимания важности структуры является тот факт, что дробные производные, входящие в структуру, рассматриваются именно как дробные производные, для любых n , а не как выражения, всего лишь принимающие известные значения при натуральных n . Например, формулы Родрига имеют смысл не только в случаях, когда их значение является многочленом.

Дробные производные нельзя определять однозначно. Однозначно они определяются только при определенных ограничениях. Дробные производные, являющиеся частью частных решений дифференциальных уравнений, должны соответствовать этим уравнениям.

Следовательно, структуру общего решения нельзя считать общим решением. Но она полезна для систематизации и понимания свойств общего решения уравнения, а также для вывода новых свойств.

Классические ортогональные многочлены имеют весовую функцию $h(x)$, которая удовлетворяет уравнению Пирсона, см. [1, с. 44]. Но функция $h(x)$, которая удовлетворяет уравнению Пирсона, не всегда является весовой функцией.

В части 2 данной работы приведены с доказательствами три теоремы. Они приведены для случая, когда $h(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона. Т.е. они применимы для всех классических ортогональных многочленов, а также для некоторых дифференциальных уравнений, которые имеют частными решениями многочлены, не являющимися классическими ортогональными.

Эти теоремы имеют следующий смысл.

Теорема 1 дает структуру общего решения для дифференциальных уравнений всех классических ортогональных многочленов (точнее, не только для них, а для всех случаев, когда функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона), что позволяет найти решения этих уравнений при отрицательных целых n .

Теорема 2 дает способ определения многочленов, являющихся частью решения дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов при отрицательных целых n .

В теореме 3 выведена и доказана рекуррентная формула для классических ортогональных многочленов.

В части 3 данной работы приведено решение уравнения Эрмита при отрицательных целых n . Часть 2 этой работы позволяет легко вывести решения при отрицательных целых n для других дифференциальных уравнений классических ортогональных многочленов, в том числе таких, частным решением которых являются многочлены Лагеррера, Гегенбауэра и Якоби. Эти решения были получены. Поэтому возникает вопрос, почему эти решения не были представлены в этой работе.

Причина, по которой эти решения не были представлены, заключается в том, что структура общего решения уравнения Эрмита отличается от структур вышеуказанных уравнений. Свойства структуры общего решения уравнения Эрмита достаточно полно выводятся из теорем 1 – 3, поскольку структура общего решения Эрмита содержит всего две дробные производные.

Структуры общих решений дифференциальных уравнений для многочленов Лагеррера, Гегенбауэра и Якоби, а также ряда других известных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, не являющимися уравнениями классических ортогональных многочленов, содержат либо четыре, либо восемь дробных производных. Поэтому теорема 1 неполно описывает свойства их структур.

Изложение же в этой работе свойств структур общих решений этих уравнений, со всеми полагающимися доказательствами, приведет к увеличению размера работы в несколько раз.

Поэтому, с целью исключить неполное представление структур общих решений, решение для отрицательных целых n представлено только для уравнения Эрмита.

В дальнейшем планируется представление в полном объеме структур общих решений других уравнений.

Другим важным вопросом этой работы является устранение недостатков в справочниках по дифференциальным уравнениям. В справочниках [3], [4] не указан ряд решений в квадратурах для некоторых обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами. Одной из целей данной статьи является заполнение некоторых из этих пробелов путем представления решения уравнения Эрмита для отрицательных целых n .

Предполагается, что такие уравнения должны представляться в справочниках не в виде

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (1)$$

в котором представлено большинство уравнений, а в приведенной (нормальной) форме

$$y''(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (2)$$

поскольку широко известен способ, см. [4, с. 146], которым любое уравнение вида (1) приводится к виду (2). Каждому уравнению вида (2) соответствует большое количество уравнений вида (1). Это приводит, во-первых, к значительному дублированию информации, которое было обнаружено при исследовании этих справочников. Во-вторых, к невозможности определить без полноценного научного исследования, можно ли найти в справочнике решение конкретного уравнения путем обнаружения в нем решенного уравнения, сводимому к тому же уравнению вида (2), что и исходное, поскольку в каждом справочнике сотни обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с рациональными коэффициентами. В-третьих, к невозможности установить без вышеуказанного исследования, где в справочниках имеются пробелы, вследствие чего эти пробелы не заполняются.

В разделе 4 предложена формулировка для представления решений уравнения Эрмита при целых n в виде (2). Хотя ранее, см. [5], указывалось на необходимость представления результатов в справочниках в виде (2), но без указания на это было бы неясно, почему представленные в этой работе результаты предложены для справочников именно в таком виде.

Также приведено дублирование информации в справочниках, касающееся уравнения Эрмита. Данное дублирование в [5] не указывалось.

Осуществлена проверка программой на языке СКА Maple, см. [6], правильности всех формул и уравнений, относящихся к решениям рассмотренных уравнений для $n \in \mathbb{Z}, -11 < n < 0$.

2 Теоремы

Основные результаты работы заключаются в следующих теоремах.

В данном разделе являются формулируются и доказываются нескольких основных теорем, применение которых к рассматриваемым обыкновенным дифференциальным уравнениям существенно облегчает получение новых решений рассматриваемых уравнений.

Теорема 1. Пусть функция $h(x)$ соответствует уравнению Пирсона, см. [1, с. 44]:

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (3)$$

$$p_1(x) \neq 0 \vee q_2(x) \neq 0, \quad (4)$$

тогда структура общего решения уравнения

$$B(x)y''(x) + (A(x) + B'(x))y'(x) - n(p_1 + (n+1)q_2)y(x) = 0, \quad (5)$$

включает в себя

$$y(x) = C_1 \frac{1}{h(x)} (h(x)B^n(x))^{(n)} + C_2 \left(\frac{B^{-n-1}(x)}{h(x)} \right)^{(-n-1)}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть

$$t(x) = h(x)B^n(x), \quad (7)$$

$$z(x) = t^{(n)}(x) = (h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (8)$$

$$y(x) = \frac{1}{h(x)} z(x) = \frac{1}{h(x)} (h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (9)$$

тогда

$$t'(x) = (A(x) + nB'(x))B^{n-1}(x)h(x), \quad (10)$$

$$B(x)t'(x) - (A(x) + nB'(x))t(x) = 0. \quad (11)$$

Продифференцируем $n+1$ раз уравнение (8), получим

$$B(x)t^{(n+2)}(x) + (B'(x) - A(x))t^{(n+1)}(x) - (n+1)(p_1 + nq_2)t^{(n)}(x) = 0, \quad (12)$$

$$B(x)z''(x) + (B'(x) - A(x))z'(x) - (n+1)(p_1 + nq_2)z(x) = 0. \quad (13)$$

Из (9) и (13) получаем (5). Пусть

$$t(x) = \frac{B^m(x)}{h(x)}, \quad (14)$$

$$z_k(x) = t^{(k)}(x) = \left(\frac{B^m(x)}{h(x)}\right)^{(k)}, \quad (15)$$

тогда

$$t'(x) = (mB'(x) - A(x)) \frac{B^{m-1}(x)}{h(x)}, \quad (16)$$

$$B(x)t'(x) + (A(x) - mB'(x))t(x) = 0. \quad (17)$$

Продифференцируем $m + 1$ раз уравнение (17), получим с учетом (15)

$$B(x)z_m''(x) + (A(x) + B'(x))z_m'(x) + (m + 1)(p_1 - mq_2)z_m(x) = 0. \quad (18)$$

Получили, что (18) при $m = -n - 1$ и

$$y(x) = z_{-n-1}(x) = \left(\frac{B^{-n-1}(x)}{h(x)}\right)^{(-n-1)}, \quad (19)$$

совпадает с уравнением (5).

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим, в чем заключается смысл теоремы 1.

Классические ортогональные многочлены соответствуют уравнению (5), см. теорема 2.1 в [1, с. 50–52]. По лемме 2.1 и теореме 2.2. в [1, с. 54–56], классические ортогональные многочлены соответствуют формуле Родрига (9). Не все функции $h(x)$, соответствующие уравнению Пирсона (3), являются весовыми функциями, они являются весовыми только для классических ортогональных многочленов, см. [1, с. 44]. Доказательства теорем 2.1 и 2.2 основаны на том, что $h(x)$ являются весовыми функциями. Следовательно, взаимосвязь между (5) и (9) в [1] установлены только для весовых функций.

Из первой части теоремы 1, т.е. выводе (5) из (9), следует, что требование в [1], что $h(x)$ являются весовыми функциями, для взаимосвязи между (5) и (9) является необязательным. Достаточно соответствия уравнению Пирсона. Условие (4) не является новым ограничением, т.к. невыполнение его всего лишь означает, что (5) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

Вторая часть теоремы 1, т.е. вывод (5) из (19), позволяет получить частные решения для (5) при $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ теми же методами, какими были получены решения для $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ классических ортогональных многочленов.

Т.е., используя теорему 1, можно найти не только решения дифференциальных уравнений для классических ортогональных многочленов при $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Но и взяв такие $h(x)$, соответствующие уравнению Пирсона (3), но не являющиеся весовыми функциями, и уравнения (5) которых отсутствуют в справочниках [3] и [4], вывести решения для них при $n \in \mathbb{Z}$, как положительных, так и отрицательных. Т.е. получить решения целого ряда не решенных ранее уравнений.

Важным следствием теоремы 1 является тот факт, что дробные производные структуры общего решения образуют пары, в которых дифференцирование одной дробной производной означает интегрирование другой, и наоборот, т.е. показатели пар дробных производных имеют разные знаки.

Это означает, что если известно частное решение, содержащее дробную производную, то, используя теорему 1, можно найти другое частное решение с дробной производной, являющееся парой с первым решением. Это касается уравнений, чьи дробные производные соответствуют уравнению Пирсона, и ряда уравнений, где такого соответствия нет. И уравнений, не соответствующих (5).

Во введении упоминалось, что структуры общих решений дифференциальных уравнений для многочленов Лагерра, Гегенбауэра и Якоби, содержат либо четыре, либо восемь решений с дробными производными. Но ведь соответствуют (6) только два. У уравнений, не соответствующих (5), ни одно решение с дробными производными не соответствует (6).

Надо учитывать, что пары решений с дробными производными могут отличаться от (6) только сомножителем. Покажем, как найти пару для известной дробной производной. Пусть известно такое решение, что для него можно найти такое $h(x)$, что оно соответствует уравнению Пирсона, и это решение можно представить как

$$y_1(x) = C_1 f(x) (h(x) B^n(x))^{(n)}, f(x) \neq \frac{1}{h(x)},$$

тогда парой к этому решению будет

$$y_2(x) = C_2 f(x) h(x) \left(\frac{B^{-n-1}(x)}{h(x)} \right)^{(-n-1)}.$$

Это означает, что для каждой такой пары решений $h(x)$ будут разными. Например, для уравнения классических ортогональных многочленов, чья структура содержит восемь производных, таких $h(x)$ будет четыре, а если считать $\frac{1}{h(x)}$ за $h(x)$, то их будет восемь. А не одна $h(x)$, указанная в учебниках.

Теорема 2. Пусть коэффициенты уравнения (5) соответствуют (3), (4), тогда

$$S_m(x) = h(x) \left(\frac{B^m(x)}{h(x)} \right)^{(m)}, \quad (20)$$

являются многочленами степени m , и частным решением уравнения

$$B(x) S_m''(x) + (B'(x) - A(x)) S_m'(x) + m(p_1 - (m+1)q_2) S_m(x) = 0. \quad (21)$$

Доказательство Сперва докажем, что $S_m(x)$ являются многочленами степени m . Пусть

$$P_k(x) = B^{k-m}(x) h(x) \left(\frac{B^m(x)}{h(x)} \right)^{(k)}, \quad (22)$$

тогда

$$P_0(x) = 1, \deg(P_0(x)) = 0. \quad (23)$$

Из (22) получим

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= B^{k+1-m}(x) h(x) \left(\frac{P_k(x) B^{m-k}(x)}{h(x)} \right)' \\ &= B(x) P_k'(x) - P_k(x) A(x) + (m-k) B'(x) P_k(x), \end{aligned} \quad (24)$$

Из (3), (4) и (24) получим

$$\deg(P_{k+1}(x)) = \deg(P_k(x)) + 1. \quad (25)$$

По математической индукции, из (23) и (25) следует

$$\deg(P_k(x)) = k, \quad (26)$$

а так как

$$S_m(x) = P_m(x), \quad (27)$$

то

$$\deg(S_m(x)) = m. \quad (28)$$

Первое утверждение теоремы доказано.

По теореме 1,

$$z_m(x) = \left(\frac{B^m(x)}{h(x)}\right)^{(m)}, \quad (29)$$

является частным решением уравнения (18). Т.к.

$$S_m(x) = h(x)z_m(x), \quad (30)$$

то, сделав замену переменных (30) в уравнении (18), получим (21).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть

$$y_n(x) = (h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (31)$$

где (31) соответствует уравнению Пирсона (3) и выполняется условие (4), тогда

$$k_0 y_{n+2}(x) + (k_1 x + k_2) y_{n+1}(x) + k_3 y_n(x) = 0, \quad (32)$$

где

$$k_0 = (p_1 + (n+2)q_2)(p_1 + (2n+2)q_2), \quad (33)$$

$$k_1 = -(p_1 + (2n+2)q_2)(p_1 + (2n+3)q_2)(p_1 + (2n+4)q_2), \quad (34)$$

$$k_2 = -(p_1 + (2n+3)q_2)(2n^2 q_1 q_2 + 2n p_1 q_1 + 6n q_1 q_2 + p_0 p_1 + 3p_1 q_1 + 4q_1 q_2), \quad (35)$$

$$k_3 = -(n+1)(p_1 + (2n+4)q_2)(4n^2 q_0 q_2^2 - n^2 q_1^2 q_2 + 4n p_1 q_0 q_2 - n p_1 q_1^2 + 8n q_0 q_2^2 - 2n q_1^2 q_2 + p_0^2 q_2 - p_0 p_1 q_1 + p_1^2 q_0 + 4p_1 q_0 q_2 - p_1 q_1^2 + 4q_0 q_2^2 - q_1^2 q_2). \quad (36)$$

Доказательство Метод доказывания следующий. Сперва показываем, что

$$y_n(x) = (U_0(x)h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (37)$$

$$y_{n+1}(x) = (V_1(x)h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (38)$$

$$xy_{n+1}(x) = (T_2(x)h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (39)$$

$$y_{n+2}(x) = (R_2(x)h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (40)$$

где $R_2(x), T_2(x), V_1(x), U_0(x)$, являются многочленами соответствующих степеней. Тогда (32) будет выглядеть как

$$((k_0R_2(x) + k_1T_2(x) + k_2V_1(x) + k_3U_0(x))h(x)B^n(x))^{(n)} = 0. \quad (41)$$

Т.к. любой многочлен второй степени можно представить как линейную комбинацию любых многочленов второй, первой и нулевой степени, то находим k_0, k_1, k_2, k_3 такие, что

$$k_0R_2(x) + k_1T_2(x) + k_2V_1(x) + k_3U_0(x) = 0. \quad (42)$$

Тогда выполняется (32) и (41).

Из сравнения (31) и (37) получим

$$U_0(x) = 1. \quad (43)$$

Приведем $y_{n+1}(x)$ к виду (38):

$$y_{n+1}(x) = ((h(x)B^{n+1}(x))')^{(n)} = ((A(x) + (n+1)B'(x))h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (44)$$

тогда из (38) и (44) получим

$$V_1(x) = (p_1 + 2(n+1)q_2)x + p_0 + (n+1)q_1. \quad (45)$$

Приведем $y_{n+2}(x)$ к виду (40):

$$y_{n+2}(x) = ((h(x)B^{n+2}(x))')^{(n+1)} = ((A(x) + (n+2)B'(x))h(x)B^{n+1}(x))^{(n+1)}, \quad (46)$$

тогда

$$y_{n+2}(x) = ([(A(x) + (n+2)B'(x))h(x)B^{n+1}(x)]')^{(n)} = [(p_1 + 2(n+2)q_2)B(x) + (A(x) + (n+2)B'(x))(A(x) + (n+1)B'(x))]h(x)B^n(x))^{(n)}. \quad (47)$$

Из (40) и (47) получим

$$R_2(x) = (p_1 + (2n+4)q_2)(p_1 + (2n+3)q_2)x^2 + 2(p_1 + (2n+3)q_2)(p_0 + (n+2)q_1)x + n^2q_1^2 + 2np_0q_1 + 2nq_0q_2 + 3nq_1^2 + p_0^2 + 3p_0q_1 + p_1q_0 + 4q_0q_2 + 2q_1^2. \quad (48)$$

Приведем $xy_{n+1}(x)$ к виду (39). По формуле Лейбница,

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x), \quad (49)$$

тогда

$$(xh(x)B^{n+1}(x))^{(n+1)} = xy_{n+1}(x) + ((n+1)B(x)h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (50)$$

следовательно,

$$xy_{n+1}(x) = (xh(x)B^{n+1}(x))^{(n+1)} - ((n+1)B(x)h(x)B^n(x))^{(n)}. \quad (51)$$

Т.к.

$$(xh(x)B^{n+1}(x))^{(n+1)} = ((B(x) + xA(x) + (n+1)xB'(x))h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (52)$$

то

$$x(h(x)B^{n+1}(x))^{(n+1)} = ((xA(x) + (n+1)xB'(x) - nB(x))h(x)B^n(x))^{(n)}. \quad (53)$$

Тогда

$$T_2(x) = (p_1 + (n+2)q_2)x^2 + (p_0 + q_1)x - nq_0. \quad (54)$$

Из сравнения старших степеней $R_2(x), T_2(x)$ получаем:

$$k_0(p_1 + (2n+4)q_2)(p_1 + (2n+3)q_2) + k_1(p_1 + (n+2)q_2) = 0, \quad (55)$$

тогда обозначим

$$k_0 = (p_1 + (n+2)q_2)W, \quad (56)$$

$$k_1 = -(p_1 + (2n+3)q_2)(p_1 + (2n+4)q_2)W. \quad (57)$$

Теперь рассмотрим, чему равно уравнение (42) при x :

$$(p_1 + (2n+3)q_2)(2n^2q_1q_2 + 2np_1q_1 + 6nq_1q_2 + p_0p_1 + 3p_1q_1 + 4q_1q_2)W + k_2(p_1 + 2(n+1)q_2) = 0. \quad (58)$$

Пусть

$$W = (p_1 + 2(n+1)q_2), \quad (59)$$

тогда получим (33) и (34) из (56), (57), (59), а из (58) получим (35). Теперь выведем (36). Рассмотрим уравнение (42) в той части, где оно не содержит x :

$$k_0(n^2q_1^2 + 2np_0q_1 + 2nq_0q_2 + 3nq_1^2 + p_0^2 + 3p_0q_1 + p_1q_0 + 4q_0q_2 + 2q_1^2) + k_1(-nq_0) + k_2(p_0 + (n+1)q_1) + k_3 = 0, \quad (60)$$

и получим (36) из (60).

Теорема 3 доказана.

Следствие 1 теоремы 3. Так как многочлены

$$S_n(x) = \frac{1}{h(x)} y_n(x) = \frac{1}{h(x)} (h(x)B^n(x))^{(n)}, \quad (61)$$

отличаются от $y_n(x)$ только одним и тем же сомножителем, то для них выполняется та же рекурсивная формула, что и для $y_n(x)$, т.е.

$$k_0 S_{n+2}(x) + (k_1 x + k_2) S_{n+1}(x) + k_3 S_n(x) = 0. \quad (62)$$

О смысле теоремы 3. В источниках, например, см. [1, с. 20], указана и доказана рекуррентная формула для классических ортогональных многочленов

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x) = (x - a_n) P_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x). \quad (63)$$

Само доказательство основано на том, что $P_n(x)$ являются классическими ортогональными многочленами, т.е. формула (63) доказана лишь для случая, когда $h(x)$ является весовой функцией. Теорема 3 дает доказательство для (63) при выполнении формулы Пирсона, т.е. в ней нет ограничения, что $h(x)$ должна быть весовой функцией, т.е. теорема 3 имеет более широкое применение.

Кроме того, в теореме 3 даны точные значения для каждого из коэффициентов. В формуле (63) точные значения коэффициентов не указаны. Например, если в (63) не дана формула для μ_{n+1} , то хотя бы понятен смысл – коэффициент при старшей степени многочлена, то смысл a_n не ясен.

По вышеуказанным причинам, из-за неудобства применения формулы (63), была сформулирована и доказана теорема 4.

3. О решениях уравнения Эрмита при отрицательных целых n

В научной литературе существует много упоминаний уравнения Эрмита

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0, \quad (64)$$

и многочленов Чебышева–Эрмита, являющимся частным решением уравнения (75), например, см. [1, с. 168–172], [3, с. 158, № 19], [4, с. 378, № 2.46], [7, с. 192–193], [8, с. 420–422], [9, с. 197–200], [10, с. 84–85], [11, с. 81–83], [12, с. 114–115], [13, с. 104–105], [14, с. 151], [15, р. 218], и определяемыми рекуррентными соотношениями:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, \quad (65)$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (66)$$

Эти многочлены указаны лишь для случая $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ решение не указано. Например, в справочнике [3, с. 158, № 19] для уравнения (4) указано решение только для $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$, как будто решений для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ в элементарных функциях не существует. Более того, для многочленов Чебышева–Эрмита указывается формула Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (67)$$

вследствие чего найти решение для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ кажется невозможным. Не рассматривается случай $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ и в более современных работах, например, [16] – [23].

Найдем решения уравнения Эрмита для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$. По теореме 1, при $n \in \mathbb{Z}, n < 0$,

$$z_m(x) = (e^{x^2})^{(m)}. \quad (68)$$

является частным решением уравнения

$$z_m''(x) - 2xz_m'(x) - 2(m+1)z_m(x) = 0. \quad (69)$$

Тогда

$$z_{-n-1}(x) = (e^{x^2})^{(-n-1)}, \quad (70)$$

будет частным решением уравнения (64), т.к. при подстановке

$$m = -n - 1,$$

в (69) получаем (64). Далее будет удобнее использовать m , т.к. новые многочлены с коэффициентом m являются многочленами степени m .

По теореме 2, многочлены, определенные формулой Родрига

$$S_m^{(H)}(x) = e^{-x^2} z_m(x) = e^{-x^2} (e^{x^2})^{(m)}, \quad (71)$$

являются частным решением уравнения

$$S_m^{(H)''}(x) + 2xS_m^{(H)'}(x) - 2mS_m^{(H)}(x) = 0. \quad (72)$$

По следствию 1 из теоремы 3, для многочленов (71) выполняется рекуррентное соотношение

$$S_{m+2}^{(H)}(x) - 2xS_{m+1}^{(H)}(x) - 2(m+1)S_m^{(H)}(x) = 0. \quad (73)$$

Из (71) получаем

$$S_0^{(H)}(x) = 1, S_1^{(H)}(x) = 2x. \quad (74)$$

Если для многочленов Чебышева–Эрмита $H_n(x)$ формулой Родрига (67) не определено решение уравнения (64) при $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, то для многочленов $S_m^{(H)}(x)$ формулой (71) аналогично не определено решение уравнения (72) при $m \in \mathbb{Z}, m < 0$.

Сделаем по теореме 2 замену переменных для уравнения (64):

$$t(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} y(x), \quad (75)$$

получим

$$t''(x) + (-x^2 + 2n + 1)t(x). \quad (76)$$

Сделаем замену переменных для уравнения (72):

$$t(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} S_m^{(H)}(x), \quad (77)$$

получим

$$t''(x) + (-x^2 - 2m - 1)t(x). \quad (78)$$

Тогда решение уравнения (76) при целых n будет иметь вид:

$$t(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) (C_1 + C_2 \int e^{x^2} (H_n(x))^{-2} dx), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (79)$$

$$t(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} S_{-n-1}^{(H)}(x) \left(C_1 + C_2 \int e^{-x^2} (S_{-n-1}^{(H)}(x))^{-2} dx \right), n \in \mathbb{Z}, n < 0. \quad (80)$$

Лемма 1. Для $H_n(x)$ и $S_n^{(H)}(x)$ выполняются следующие соотношения:

$$S_n^{(H)}(x) = (-i)^n H_n(ix), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (81)$$

$$H_n(x) = (i)^n S_n^{(H)}(-ix), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0. \quad (82)$$

Доказательство Из (65), (74) следует, что (81) выполняется для $n = 0$ и $n = 1$. Покажем, что если (81) выполняется для n и $n - 1$, то оно выполняется и для $n + 1$. Возьмем уравнение (73), заменим m на $n - 1$, и сделаем подстановку (81), получим

$$(-i)^{n+1} H_{n+1}(ix) - 2x(-i)^n H_n(ix) - 2n(-i)^{n-1} H_{n-1}(ix) = 0. \quad (83)$$

Уравнение (83) совпадает с уравнением (66), но для $H_n(ix)$. По методу математической индукции, (81) доказано. Из (81) получим (82).

Лемма 1 доказана.

4. Формулировка для представления решений уравнения Эрмита при целых n

Если уравнение и его решение представляется для справочника, то желательно его обобщить до такой степени, чтобы оно оставалось понятным неспециалисту. Сделаем замену переменных в (87):

$$y(x) = t(\sqrt{a}x), a > 0, \quad (84)$$

получим

$$y''(x) + (-a^2 x^2 + a(2n + 1))y(x) = 0. \quad (85)$$

Очевидно, что при $2a = 1$, уравнение (85) является одной из стандартных форм уравнения параболического цилиндра (Вебера)

$$y''(x) + \left(-\frac{x^2}{4} + v\right)y(x) = 0, \quad (86)$$

см. [24, с. 494], [25, с. 176]. Следовательно, эта форма имеет решение в квадратурах при

$$v = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}, \quad (87)$$

а не только при натуральных n , как это указано, например, [4, с. 384, № 2.87].

Можно порекомендовать для включения в справочники решение в следующем виде:

Решениями уравнения (85) при целых n и $a > 0$ являются:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}ax^2} H_n(\sqrt{ax})(C_1 + C_2 \int e^{ax^2} (H_n(\sqrt{ax}))^{-2} dx), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (88)$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}ax^2} S_{-n-1}^{(H)}(\sqrt{ax})(C_1 + C_2 \int e^{-ax^2} (S_{-n-1}^{(H)}(\sqrt{ax}))^{-2} dx), n \in \mathbb{Z}, n < 0, \quad (89)$$

добавив известные свойства $H_n(x)$, указанные в справочниках, а также свойства $S_n^{(H)}(x)$, указанные в этой работе.

Такая формулировка не только содержит новые решения, для $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, отсутствующие в справочниках, кроме того, исключает имеющееся в них дублирование информации, см. [3, № 3, с. 157, № 5, с. 157, № 8, при $n = 1$, с. 157, № 9, при $n = 2$, с. 158, № 14, с. 158, № 16, при $n = 1$, с. 158, № 17, при $n = 1$, с. 158, № 21, с. 159, № 22, с. 159, № 23, с. 159, № 24, с. 159, № 26, с. 159, № 29, при $n \in \{0,1\}$, с. 159, № 45, при $n = 1, m \in \{0,1\}$, с. 160, № 47, при $n = 1$, с. 160, № 48, при $n = 1$, с. 160, № 49, при $n = 1$, с. 160, № 52, при $n = 1, m = 1$, с. 160, № 57, при $n = 1, m = \{0,1\}$, с. 161, № 76, с. 164, № 87, при $n = 2$, с. 164, № 95, при $n = 2$, с. 165, № 139, при $n = 3, m = 0$, с. 170, № 216, при $n = 3, a = 0$, с. 181, № 227, при $n = 0, b = 0$, с. 182, № 229, при $n = 1, b = 0$, с. 182, № 230, при $n = -1, a = 2c$, с. 182, № 232, при $n = -1, m \in \{0,1\}$, с. 182, № 232, при $n = 0, m = 1$, с. 182], [4, № 2.11, с. 366, № 2.11a, с. 366, № 2.13, с. 367, № 2.39, с. 377, № 2.40, с. 377, № 2.43, с. 377, № 2.45, с. 378, № 2.126a, $b = 2$, $c \in \{a, ab, a(b+1)\}$, с. 393].

Список литературы

- [1] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1979. – 416 с.
- [2] Лътниковъ А. В. Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ. Матем. сб., 1868, том 3, номер 1, с. 1–68.
- [3] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИФ «Физ-мат. лит.», 2001. – 576 с.
- [4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.
- [5] Зайков С.Ю., Ворожцов Е.В. Проблемы качества и надёжности данных в справочниках по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений// Математические структуры и моделирование. 2025. № 3 (77), с. 49–65.
- [6] Maple User Manual. Canada: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2024. 348 p.
- [7] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974. – 295 с.
- [8] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. – М.: Госиздат физико-математической литературы, 1962. – 464 с.
- [9] Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: Госиздат иностранной литературы, 1948. – 260 с.
- [10] Курант Р., Гилберт Д. Методы математической физики, т. 1. – М.: Гостехиздат, 1952. – 525 с.
- [11] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Госиздат физико-математической литературы, 1963. – 358 с.
- [12] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: Госиздат физико-математической литературы, 1962. – 500 с.
- [13] Фок В.А. Начала квантовой механики. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1976. – 376 с.
- [14] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. – 344 с.

- [15] Oldham K.B., Myland J., Spanier J. An atlas of functions. New York, Springer Science+Business Media, LLC, 2009. 748p.
- [16] Dominici D. Asymptotic analysis of the Hermite polynomials from their differential–difference equation. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2007. Vol. 13(12), pp. 1115–1128.
- [17] Kyung–Won Hwang, Cheon Seoung Ryoo. Differential Equations Associated with Two Variable Degenerate Hermite Polynomials. *Mathematics*. 2020. Vol. 8(2), 228.
- [18] Kumari A., Kukreja V.K. Survey of Hermite Interpolating Polynomials for the Solution of Differential Equations. *Mathematics*. 2023. Vol. 11(14), 3157.
- [19] López J.L., Temme N.M. Approximations of orthogonal polynomials in terms of Hermite polynomials. *Methods and Applications of Analysis*. 1999. Vol. 6(2), pp. 131–146.
- [20] Secer A., Ozdemir N., Bayram M. A Hermite Polynomial Approach for Solving the SIR Model of Epidemics. *Mathematics*. 2018. Vol. 6(12), 305.
- [21] Wünsche A. General Hermite and Laguerre two–dimensional polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2000. Vol. 33, pp. 1603–1629.
- [22] Nagel B. The relativistic Hermite polynomial is a Gegenbauer polynomial. *J. Math. Phys.* 1994. Vol. 35(4), pp. 1549–1554.
- [23] Amiri M. A New Generating Function for Hermite Polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. May 2025.
- [24] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.:Наука, 1979. – 832 с.
- [25] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. ч.2. М.: Госиздат физико–математической литературы, 1963. – 500 с.

On the Solution of the Hermite Equation for Negative Integer n

Zaikov S.Yu.

Municipal autonomous institution of additional education "Sports School of Winter Sports of the City of Tomsk"

zaykov_tomsk@mail.ru

Abstract. Ordinary linear second-order differential equations with rational coefficients are considered, whose particular solutions are classical orthogonal polynomials. The concept of a solution structure for equations of classical orthogonal polynomials has been introduced, where the solution is expressed in terms of fractional derivatives. Theorems about the new properties of these differential equations have been formulated and proven. This includes the theorem concerning the solution of these equations for negative integer n , which specifies that these solutions are expressed via Rodrigues' formulas and are connected to polynomials. A theorem on recurrence relations for new polynomials has been proven. As an example of the application of these theorems, the Hermite equation was used. For the Hermite equation, solutions for negative integer values of n were found, expressed in terms of polynomials, and recurrence relations for them were also derived. The duplication of information in reference materials is demonstrated using the Hermite equation for positive integer n . To fill gaps in the literature on ordinary differential equations, a formulation for the solution of the given Hermite equation for integer values of n , including negative ones, is proposed, which avoids information duplication.

Keywords: linear differential equations, Hermite polynomials, Rodrigues' formula, lacunae in reference works, recurrence relations, fractional derivatives.

Комментарии к негласному запрету для сторожей публиковаться в журналах ВАК России. В настоящее время в России существует негласный запрет публиковаться в журналах Высшей аттестационной комиссии (ВАК) для независимых исследователей. В том числе, запрещено публиковать в журналах ВАК сторожей, грузчиков, уборщиц, слесарей, дворников и даже профессоров, если они вышли на пенсию.

Такой запрет является дискриминацией независимых исследователей, и является преступлением, уголовно наказуемым в соответствии со статьей 136 уголовного кодекса России «Нарушение равенства прав и свобод человека и гражданина».

Для того, чтобы защитить кандидатскую или докторскую степень, необходимо публиковаться в журналах, входящих в определенный Перечень ВАК. Например, для математиков, вроде меня, для кандидатской достаточно двух публикаций, для докторской – десять. Мне кандидатской мало, по дифференциальным уравнениям у меня сейчас материала где-то на 40-50 статей.

Но некая Межведомственная комиссия по защите государственной тайны каким-то Решением от 30.10.2014 г. № 293 утвердила некие Рекомендации по проведению экспертизы материалов, предназначенных для открытого опубликования. Найти текст этих Рекомендаций невозможно, видимо, они являются особо важной государственной тайной. Хотя они фактически породили обязанности авторов представлять в журналы ВАК Акты, или экспертизы, о возможности открытого опубликования, т.е. об отсутствии в статьях государственной тайны. А любые нормативно-правовые акты, порождающие права и обязанности, не действуют без опубликования.

Это было бы нормально, если бы такие Акты требовали только от тех, кто имеет доступ к государственной тайне. Но их требуют от всех, включая сторожей до дворников, которые заведомо не имеют доступа к государственной тайне. И такие Акты им получить невозможно. Комиссии по экспертизе материалов, предназначенных для открытого опубликования были созданы в ВУЗ и НИИ, но они дают такие Акты только тем, кто является их сотрудниками.

Абсурдным является тот факт, что Акты требуют в журналах по теоретической математике, в том числе, по дифференциальным уравнениям, где заведомо не может быть государственной тайны. Например, журнал «Дифференциальные уравнения» требует экспертное заключение об отсутствии ограничений для открытой публикации материалов, его же требует журнал «Известия высших учебных заведений. Математика», и так далее.

Хотя у меня недавно была опубликована одна статья в журнале «Математические структуры и моделирование», но это произошло потому, что моим соавтором был новосибирский профессор Ворожцов, который сделал экспертное заключение в новосибирском Академгородке.

Демонстрация усилий по сохранению секретности выглядит бессмысленной потому, что любой высокопоставленный чиновник в России может выдать любую государственную тайну совершенно безнаказанно. И его предательство будет поддержано всей системой государственной власти. Например, схема водозабора в Томске является государственной тайной. Тогдашний губернатор Кресс не просто выдал эту схему, он передал сам водозабор иностранной фирме. И был поддержан ФСБ, прокуратурой и судьями.

Есть некоторые журналы, которые не требуют экспертного заключения. Одним из них является журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». Я послал туда статью «О виде многочленов Эрмита, Лагерра, Гегенбауэра и Якоби при отрицательных целых n », <https://archive.org/details/20251027>.

Вопреки правилам журнала, мне отказали в публикации, не отправив ее на рецензирование, и даже ее не читая, что видно из формулировки отказа:

«Уважаемый Сергей Зайков, редколлегия журнала рассмотрела вашу статью и считает, что она представляет собой собрание упражнений по выводу формул, которое основано на неких гипотезах, справедливость которых трудно оценить. Материал к публикации не рекомендуется. По поручению редакции Наталья Борисовна Ампилова, зам. гл. редактора».

Полагаю, что такой отказ был из-за того, что я сторож. Лыжи охраняю.

Думаю, что если бы статью прочли, то ее должны были опубликовать. Ведь в ней найдены решения для уравнений классических ортогональных многочленов при отрицательных целых n , чего до меня не было сделано.

Мне известен еще один журнал, который не требует экспертного заключения. Если и там меня пошлют на три советских буквы, то мне придется признать нелепый, но реальный факт. **Мои математические исследования запрещено публиковать в России. Потому, что я сторож.**

Я не из тех, кто опускает руки. Я буду использовать и другие возможности, чтобы решить эту проблему.

Я полагаю, что существует четыре варианта, почему всем слесарям и продавцам перекрыли публикации в научных журналах:

грузчик Перельман устроил шумиху, и поэтому на верху было принято решение придушить потенциальных Перельманов,

верхушка власти устроила гнилой пиар, как они «заботятся» о России,

кто-то высокопоставленный, но ни на что не способный, решил продемонстрировать, что он что-то делает,

в целях контроля науки, давят независимых исследователей, чтобы они чего не надо не придумали, поскольку зависимых исследователей всегда можно уволить из ВУЗ и НИИ.

Планируются следующие публикации. Статья «О виде многочленов Эрмита, Лагерра, Гегенбауэра и Якоби при отрицательных целых n », хоть и содержит новые и интересные моменты с точки зрения современной теории, но для меня она уже устарела вследствие моих более новых исследований.

Данная статья является частью статьи «О виде многочленов Эрмита, Лагерра, Гегенбауэра и Якоби при отрицательных целых n », но эта часть дополнена с учетом новейших исследований.

В этой статье введено понятие структуры общего решения, возможности которого используются здесь лишь для решения уравнения Эрмита при отрицательных целых n .

Это новое и весьма обширное направление (на кучу докторских диссертаций).

Возможности структуры общего решения будут более широко показаны в следующей статье «Структура общего решения уравнения Лагерра и Уиттекера, и решение при отрицательных целых n », которая написана и сейчас будет выставлена в Архив.орг и на мою страницу в Академии, <https://independent.academia.edu/СергейЗайков>. В этой статье доказан забавный парадокс «Иногда интегрирование можно заменить дифференцированием». Я люблю постебаться, даже в математике.

Еще полней возможности структуры общего решения будут показаны в статье «Структура общего решения уравнений для многочленов Якоби и Гегенбауэра, и решение при отрицательных целых n » (сейчас пишу).

Затем планируется 4 статьи о структуре общего решения известных дифференциальных уравнений, не относящимися к классическим ортогональным многочленам.

Далее статьи о структуре общего решения будут посвящены не структурам конкретных уравнений, а возможностям использования структур.

Кроме того, планируется серия статей «Новые точные решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами», штук десять-пятнадцать, в которых будут приводиться решения дифференциальных уравнений, отсутствующих в справочниках Камке и Зайцева-Полянина, некоторые из которых будут описаны структурами.

Также будет серия статей о дробных производных, которые получаются из структур.